

Studi Teoretik/Eksperimen Gelombang Permukaan Air dan Soliton pada Air Dangkal

Ahmad Ridwan^{1,2}, M. Ginanjar Azie^{1,2}, Jusak S. Kosasih¹

¹Kelompok Keahlian Fisika Teoretik, FMIPA, Institut Teknologi Bandung

²Kelompok Studi Mahasiswa 102 Fisikawan Muda, Institut Teknologi Bandung
Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, e-mail : fm102itb@yahoo.com

Abstrak

Gelombang pada permukaan air dengan amplitudo yang cukup besar menunjukkan efek nonlinearitas sesuai persamaan Euler untuk fluida dengan asumsi viskositasnya diabaikan. Berdasarkan eksperimen yang telah dilakukan, gelombang tersebut diduga merupakan sebuah soliton karena bentuk dan kecepatannya yang cenderung tidak berubah dan tumbukan kedua gelombang itu serupa dengan tumbukan dua buah partikel. Solusi gerak gelombang kemudian dapat diturunkan dari persamaan KdV (Korteweg-deVries) untuk permukaan air dangkal.

Kata kunci : gelombang air dangkal, persamaan Euler, soliton, persamaan KdV.

1 Pendahuluan

Ada berbagai macam jenis gelombang di alam semesta. Soliton adalah sebuah gelombang nonlinear yang memiliki sifat: (1) terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan, (2) stabil melawan tumbukan dan mempertahankan identitasnya. Sifat pertama merupakan kondisi gelombang soliter (*solitary waves*) yang dikenal dalam hidrodinamika sejak abad ke-19. Sifat yang kedua berarti gelombang tersebut memiliki kelakuan sebagai partikel. Dalam fisika modern, akhiran “-on” biasa digunakan untuk menunjukkan kelas partikel [1], misalnya fonon dan foton. Sifat soliton yang tampak sebagai partikel memang menjadi salah satu bahan yang menarik untuk dikaji dewasa ini.

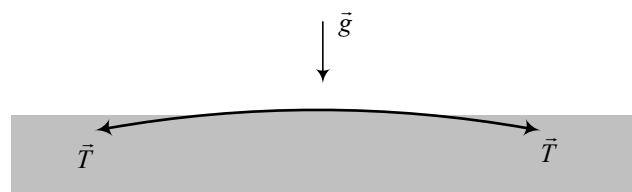
Pengamatan soliton yang pertama kali terdokumentasi dengan baik dilakukan pada 1834 oleh ilmuwan Skotlandia, John Scott-Russel [2]. Ia mengamati gerak sebuah perahu dari kudanya. Ketika perahu tiba-tiba berhenti, timbullah gelombang air dengan sebuah puncak yang bergerak menjauh dari perahu. Pergerakan gelombang air tersebut kemudian diamati dan ditelusuri olehnya hingga sekitar 2 mil. Bentuk dan kecepatan gelombang air itu nyaris tidak berubah hingga akhirnya menghilang dari pandangan karena masuk ke dalam terowongan air.

Sebagai sebuah fenomena alam, soliton tentu harus dapat dijelaskan secara fisis maupun matematis. Dalam makalah ini akan ditinjau beberapa persamaan beserta eksperimen yang menunjukkan keberadaan soliton air yang serupa dengan pengamatan Russel.

2 Persamaan Gelombang Permukaan

Gelombang dapat muncul pada kondisi awal permukaan cairan yang tenang akibat pengaruh beberapa gangguan dari luar. Ada dua macam gelombang yang utama pada permukaan air, yaitu *gelombang gravitasi* dan *gelombang kapiler*.

Jenis gelombang yang pertama memiliki panjang gelombang dari sekitar setengah meter sampai beberapa ratus meter yang dihasilkan dari aksi medan gravitasi \vec{g} yang menjaga agar permukaan air tetap pada tingkat terendah, sebagaimana ditunjukkan pada gambar 1. Gelombang-gelombang ini umumnya terjadi pada permukaan cairan, tetapi sifatnya sangat ditentukan oleh kedalaman.



Gambar 1. Efek gravitasi dan tegangan permukaan.

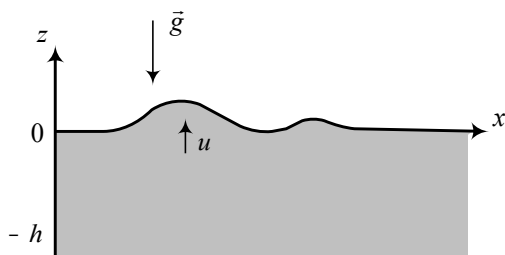
Jenis gelombang kedua, yaitu gelombang kapiler, merupakan riak-riak dari panjang gelombang pendek yang jelas, tidak lebih dari beberapa sentimeter. Gelombang tersebut dihasilkan dari tegangan permukaan T yang bekerja sebagai gaya pemulih dan berfungsi untuk menjaga permukaan tetap datar. Pengaruh tegangan permukaan ini mula-mula akan diabaikan dulu untuk memudahkan perhitungan, sebelum akhirnya dimasukkan ke dalam persamaan gelombang air sebagai sebuah efek tambahan.

Tinjau gerakan gelombang pada permukaan air dengan udara di atasnya, dengan medan gravitasi konstan g yang berperan sebagai gaya pemulih yang dominan (efek dari tegangan permukaan diabaikan). Cairan diasumsikan dibatasi dari bawah oleh permukaan horizontal yang keras dan kedalaman air adalah h . Koordinat sistem dipilih sedemikian rupa sehingga sumbu- z vertikal ke atas dan bidang xy berimpit dengan permukaan fluida yang tenang. Vektor medan gravitasi dengan demikian dapat ditulis $\vec{g} = -g\hat{z}$. Pada permukaan atas yang bebas dapat ditentukan

$$z = u(x, y, t), \quad (1)$$

dengan u merupakan koordinat z dari sebuah titik pada permukaan yang berkaitan dengan simpangan vertikal permukaan tersebut. Permukaan pada keadaan seimbang dianggap tidak terganggu sehingga saat itu $u = 0$.

Beberapa asumsi lain yang digunakan adalah sebagai berikut: (1) air bersifat tak termampatkan, sehingga kerapatannya ρ dianggap konstan di seluruh volum, (2) gaya gesek (viskositas) dalam air diabaikan karena hanya efektif untuk pergerakan skala kecil. Dengan anggapan tersebut, persamaan yang digunakan untuk meninjau gelombang gravitasi pada air adalah persamaan Euler untuk aliran tak berotasi dari fluida tak termampatkan dengan permukaan bebas.



Gambar 2. Gelombang gravitasi pada permukaan.

$$\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \text{ untuk } -h < z < u; \quad (2a)$$

$$\phi_z = u_x \phi_x + u_y \phi_y + u_t, \text{ pada } z = u; \quad (2b)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g u = 0, \text{ pada } z = u; \quad (2c)$$

$$\phi_z = 0, \text{ pada } z = -h. \quad (2d)$$

ϕ pada rangkaian persamaan di atas merupakan potensial kecepatan yang dapat diperoleh dari mekanika fluida [3]. Persamaan tersebut bersifat dispersif akibat g dan nonlinear akibat suku-suku $u_x \phi_x + u_y \phi_y$ dan $(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2)$. Secara umum, kita akan mencari solusinya dengan memecahkan persamaan Laplace linear (2a) kemudian menerapkan syarat batas nonlinear (2b) dan (2c).

2.1 Pengaruh amplitudo kecil

Jika kita anggap permukaan air mendapat sedikit gangguan, maka dapat diperoleh ketinggian rata-rata permukaan bebas u dan potensial kecepatan ϕ , keduanya cukup kecil apabila dibandingkan dengan panjang dan periode gelombang. Syarat batas permukaan bebas dengan demikian dapat dilinearisasi sehingga persamaan (2b) dan (2c) diaproksimasi menjadi

$$u_t - \phi_z = 0, \text{ pada } z = \eta, \quad (3a)$$

dan

$$\phi_t + g u = 0, \text{ pada } z = \eta. \quad (3b)$$

Oleh karena u kecil, persamaan (3a) dapat disederhanakan dengan ekspansi di sekitar $z = 0$

$$(\phi_z)_\eta = (\phi_z)_0 + \eta(\phi_{zz})_0 + \dots$$

Berdasarkan pendekatan orde pertama, ϕ_z dalam (3a) dapat dievaluasi di $z = 0$ daripada di $z = u$. Eliminasi u setelah diferensiasi (3b) terhadap waktu akan menghasilkan

$$\phi_{tt} + g \phi_z = 0, \text{ pada } z = 0. \quad (4)$$

Proses di atas mereduksi persoalan batas bebas nonlinear dari persamaan (2) ke persoalan batas tentu linear untuk potensial kecepatan:

$$\nabla^2 \phi = 0, \text{ untuk } -h < z < 0; \quad (5a)$$

$$\phi_{tt} + g \phi_z = 0, \text{ pada } z = 0; \quad (5b)$$

$$\phi_z = 0, \text{ pada } z = -h. \quad (5c)$$

Dari sini kita dapat batasi pembahasan pada persoalan satu dimensi dengan menganggap gelombang merambat sepanjang sumbu- x dan

seragam pada arah sumbu-y. Secara eksperimen, gelombang pada permukaan air terlihat mendekati bentuk sinusoidal. Berdasarkan hal itu, solusi dari (5a) dapat berbentuk

$$\phi = A(x, z) \sin(kz - \omega t). \quad (6)$$

dengan ω adalah frekuensi dan k adalah bilangan gelombang.

Substitusikan tebakan solusi tersebut ke persamaan Laplace (5a),

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - k^2 A \right) \sin(kx - \omega t) + k \frac{\partial A}{\partial x} \cos(kx - \omega t) = 0.$$

Oleh karena nilai sin maupun cos pada persamaan di atas umumnya tidak nol, maka koefisien kedua suku tersebut harus nol. Akibatnya adalah $\partial A / \partial x = 0$, yang berarti A tidak bergantung x (tidak ada dispersi). Dengan demikian,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - k^2 A = 0. \quad (7)$$

Solusi umum dari persamaan (7) adalah

$$A(z) = C e^{kz} + D e^{-kz},$$

dengan dua buah konstanta sembarang, C dan D . Potensial kecepatan kemudian dapat dinyatakan dengan

$$\phi = (C e^{kz} + D e^{-kz}) \sin(kx - \omega t).$$

Berdasarkan syarat batas (5c):

$$\phi_z(-h) = 0,$$

diperoleh

$$(k C e^{-kh} - k D e^{kh}) \sin(kx - \omega t) = 0.$$

Nilai $\sin(kx - \omega t)$ umumnya tidak nol, sehingga

$$D = C e^{-2kh}.$$

Masukkan hasil ini ke pernyataan ϕ sehingga memberikan

$$\phi = 2C e^{-kh} \cosh[k(z+h)] \times \sin(kx - \omega t). \quad (8)$$

Dari persamaan (3a) dan (8), didapat $u_i = \phi_z$,

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dt \\ &= 2k \frac{C}{\omega} e^{-kh} \sinh(kh) \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (9)$$

Definisikan amplitudo yang baru,

$$a_m = 2 e^{-kh} k \frac{C}{\omega} \sinh(kh)$$

sehingga

$$u = a_m \cos(kx - \omega t), \quad (10)$$

dan potensial kecepatan akan menjadi

$$\phi = \omega a_m \frac{\cosh[k(z+h)]}{k \sinh(kh)} \sin(kx - \omega t). \quad (11)$$

Dari syarat (5b) yang dipenuhi oleh persamaan (8) dan (11), diperoleh hubungan dispersi untuk gelombang gravitasi pada permukaan air dengan amplitudo yang kecil, yaitu

$$\omega^2 = g k \tanh(kh), \quad (12)$$

yang berlaku hanya jika tegangan permukaan diabaikan. Dari persamaan (12) kita juga dapat menghitung kecepatan gelombang

$$\begin{aligned} v &= \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \\ &= \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)}, \end{aligned} \quad (13)$$

dan kecepatan grup

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{v}{2} \left[1 + \frac{2kh}{2 \sinh(2kh)} \right]. \quad (14)$$

Persamaan (12,13,14) memberikan petunjuk bagi kita bahwa ω , v , dan v_g bergantung hanya pada kh atau setara dengan besaran yang tak berdimensi, h/λ . Dari sini kita dapat tinjau dua kasus asimtotik yang menarik, yaitu gelombang *air dangkal* dan *air dalam*. Namun cakupan pembahasan pada makalah ini terbatas hanya untuk gelombang air dangkal.

2.2 Gelombang pada air dangkal

Jika $h/\lambda \ll 1$, panjang gelombang λ cukup besar dibandingkan kedalaman h sehingga gelombang yang ditinjau adalah gelombang pada permukaan air dangkal. Untuk kasus ini, $kh \ll 1$, sehingga suku $\tanh(kh)$ dapat diuraikan menjadi

$$\tanh(kh) \approx kh - \frac{(kh)^3}{3},$$

dan dengan demikian persamaan (12) akan menjadi

$$\omega^2 = c_0 k [1 - (kh)^2/6 + \dots], \quad (15)$$

dengan $c_0 = \sqrt{g h}$.

Ambil $h/\lambda = \delta$, dengan δ parameter yang sangat kecil, maka terlihat dari persamaan (15) bahwa suku dispersi kedua sebanding dengan δ^2 sehingga dapat diabaikan. Oleh karena itu, persamaan (12) dan (13) dapat didekati oleh

$$\omega \approx c_0 k, \quad (16a)$$

$$v \approx \sqrt{g h} = c_0. \quad (16b)$$

Hasil di atas menunjukkan bahwa untuk gelombang harmonik dengan panjang gelombang yang cukup besar dibandingkan kedalaman, maka pengaruh dispersinya dapat diabaikan dan laju gelombang c_0 hanya bergantung pada kedalaman, demikian pula laju grupnya. Bentuk gelombang permukaan air dengan demikian akan sinusoidal dengan simpangan permukaan bebas diberikan oleh persamaan (11). Kenyataan ini menunjukkan gelombang air dangkal yang ditinjau bersifat *linear* akibat beberapa aproksimasi yang telah dilakukan.

Selain hasil tersebut, kita juga dapat ambil pendekatan

$$\cosh[k(z+h)] \approx 1, \quad \sinh kh \approx kh.$$

Pernyataan (11) untuk potensial kecepatan dengan demikian dapat didekati oleh sebuah gelombang harmonik dengan amplitudo yang konstan. Komponen horizontal dan vertikal dari kecepatan adalah

$$w_h = dx/dt = \phi_x, \quad w_v = dz/dt = \phi_z$$

yang jika dihitung hasilnya adalah

$$w_h = \frac{a_m \omega}{k h} \cos(kx - \omega t) = c_0 \frac{u}{h}, \quad (17a)$$

$$w_v = a_m \omega \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin(kx - \omega t). \quad (17b)$$

Dari hubungan ini tersirat fakta ternyata komponen horizontal lebih dominan dari komponen vertikal.

2.3 Efek tegangan permukaan

Hingga kini kita berasumsi bahwa tekanan pada permukaan bebas identik dengan tekanan atmosfer. Padahal kenyataannya terdapat diskontinuitas kerapatan pada bidang kontak antara air dan udara yang menyebabkan perbedaan tekanan, yang dapat dianggap

sebagai sebuah efek tegangan permukaan dan keadaan permukaan air tampak seperti sebuah membran yang diregangkan. Seperti halnya gravitasi, tegangan permukaan T berperan sebagai gaya pemulih yang berkontribusi pada dispersi gelombang. Secara analitik, jika efek tegangan permukaan dimasukkan ke dalam perhitungan, syarat batas nonlinear (2c) digantikan oleh

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + g u$$

$$\frac{T}{\rho}(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \text{ pada } z = u. \quad (18)$$

Untuk gelombang dengan amplitudo kecil, persamaan (18) dapat didekati oleh syarat batas linear,

$$\phi_t + g u - \frac{T}{\rho}(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \text{ pada } z = 0, \quad (19)$$

yang menggantikan persamaan (3b). Turunkan persamaan di atas terhadap waktu dan dengan bantuan persamaan (3a) dapat diperoleh

$$\phi_{tt} + g \phi_z - \frac{T}{\rho}(\phi_{xx} + \phi_{yy})_z = 0 \text{ pada } z = 0, \quad (20)$$

Untuk memudahkan, kita tinjau perambatan gelombang pada sumbu- x saja. Dengan kondisi ini, solusi dari persoalan gelombang dengan amplitudo kecil yang menyertakan efek tegangan permukaan akan identik dengan gelombang akibat gravitasi, kecuali bahwa persamaan (5b) digantikan oleh persamaan (20). Oleh karena itu, kita cari solusi sinusoidal yang bentuknya seperti (11) dan diperoleh hubungan dispersi:

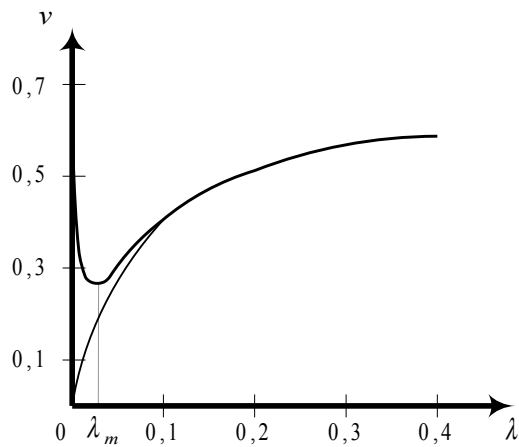
$$\omega = \sqrt{g k \left(1 + \frac{T k^2}{\rho g}\right) \tanh(k h)}. \quad (21)$$

Kecepatan gelombang pada persamaan (13) kemudian akan menjadi

$$v = \sqrt{\frac{g}{k} \left(1 + \frac{T k^2}{\rho g}\right) \tanh(k h)}$$

$$= \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} \left(1 + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho g}\right) \tanh(2\pi h/\lambda)}. \quad (22)$$

Dengan data tegangan permukaan air pada suhu tertentu, kita dapat plot hubungan kecepatan terhadap panjang gelombang untuk kasus tegangan permukaan diabaikan (hanya ada gravitasi saja), maupun tidak diabaikan. Hasilnya ditunjukkan pada gambar 3.



Gambar 3. Kecepatan fase v terhadap panjang gelombang λ . Kurva yang lebih tipis terjadi jika tegangan permukaan diabaikan.

3 Soliton pada Air Dangkal

Ketika amplitudo gelombang pada permukaan air cukup besar, maka nonlinearitas yang sebelumnya dilinearisasi haruslah masuk ke dalam perhitungan. Pergerakan gelombang dispersif pada air dangkal kemudian dapat dimodelkan dengan persamaan Korteweg-deVries (KdV). Untuk menangani masalah ini, kita ambil pendekatan fenomenologi.

Pada bagian 2.2, kita lihat bahwa ketika panjang gelombang menurun, maka gelombang akan menyebar secara lemah. Untuk kasus tersebut, laju gelombang yang sesuai dengan persamaan (15) adalah $v \approx c_0(1 - k^2 h^2 / 6)$. Nilai ini menyimpang dari laju gelombang nondispersif c_0 oleh suku yang sebanding dengan kuadrat bilangan gelombang k , yaitu suku dispersif yang dominan $(h/\lambda)^2 = \delta^2$.

Selanjutnya, ketika panjang gelombang cukup besar dibandingkan kedalaman air, kita telah lihat gelombang air dangkal yang tidak menyebar. Jadi, jika simpangan permukaan bebas u tidak dianggap cukup kecil, maka pendekatan yang lebih baik untuk laju gelombang yang mungkin digunakan adalah dengan menggantikan h pada persamaan (16) oleh $h+u$. Pendekatan menghasilkan sebuah kecepatan (relatif terhadap fluida) dalam bentuk

$$v = \sqrt{g(h+u)} \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u}{h} \right).$$

Lebih lanjut lagi, dari (17) kita tahu kecepatan horizontal partikel fluida $w_h = c_0 u / h$, sehingga

kecepatan perambatan gelombang dapat didekati oleh

$$c \approx c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u}{h} \right) + c_0 \frac{u}{h} = c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{u}{h} \right). \quad (23)$$

Akibatnya, kecepatan gelombang menyimpang dari kecepatan fase tak terdispersi c_0 oleh suku yang sebanding dengan tinggi gelombang u . Hasil ini telah diperkirakan oleh Airy [4] yang menunjukkan bahwa gelombang nonlinear dapat memiliki kecuraman yang berubah sewaktu-waktu dan kemudian akan hancur. Kita dapat melihat peristiwanya secara nyata di permukaan lautan luas. Ketika gelombang air mendekati pantai, tinggi gelombang bertambah dengan drastis dan dapat menjadi *tsunami* [5]. Biasanya *tsunami* ini pada awalnya hanya berketinggian 1 meter, tetapi ketika mencapai pantai dapat memiliki ketinggian lebih dari 30 meter.

Jika *nonlinearitas* dan *dispersi* muncul bersamaan, keduanya dapat saling seimbang. Persamaan sebelumnya dapat dikombinasikan menjadi

$$v = \frac{\omega}{k} \approx \left(1 - \frac{k^2 h^2}{6} + \frac{3}{2} \frac{u}{h} \right). \quad (24)$$

Parameter yang tak berdimensi,

$$(3u/2h)/(h^2 k^2/6) \sim a_m / h^3 k^2,$$

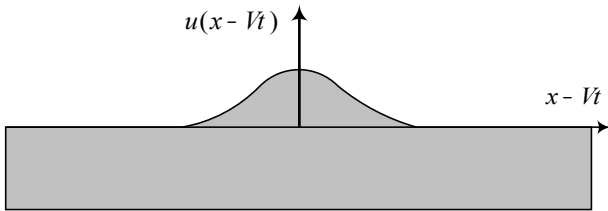
dengan a_m adalah amplitudo dari u disebut dengan *bilangan Ursell*. Bilangan ini memberi ukuran nonlinearitas dibandingkan dengan dispersi dan diperkenalkan oleh Ursell [6]. Kemudian, untuk persamaan (10) kita perhatikan bahwa turunan ke- n terhadap waktu dan ruang dari fungsi gelombang u ternyata masing-masing berkaitan dengan pangkat ke- n dari ω dan k . Pada keadaan ini, suku-suku ω dan k dalam hubungan dispersi (24) digantikan oleh operator $i\partial/\partial t$ dan $-i\partial/\partial x$ yang bekerja pada fungsi $u(x,t)$. Kita peroleh

$$i \frac{\partial}{\partial t} u = -i c_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{6} h^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} \frac{u}{h} \frac{\partial}{\partial x} \right) u$$

atau

$$u_t + c_0 u_x + \frac{3}{2} \frac{c_0}{h} u u_x + \frac{1}{6} c_0 h^2 u_{xxx} = 0. \quad (25)$$

Ini adalah persamaan KdV yang kemudian setelah dilakukan transformasi berdasarkan kerangka bergerak $x - c_0 t$ dapat diperoleh solusinya



Gambar 4. Profil soliton pada permukaan air sesuai solusi persamaan (26).



Gambar 5. Model akuarium untuk menghasilkan gelombang pada permukaan air dangkal.

$$u = a_m \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3 a_m}{4 h^3}} (x - V t) \right], \quad (26)$$

dengan laju perambatan gelombang

$$V = c_0 \left(1 + \frac{a_m}{2 h} \right). \quad (27)$$

4 Tinjauan Eksperimen

Dari sudut pandang matematis yang telah diturunkan, bentuk gelombang permukaan pada air dangkal dapat berupa sinusoidal jika efek linear lebih dominan, dan akan berbentuk seperti gambar 4 jika nonlinearitas yang lebih dominan. Untuk menunjukkan kebenaran tinjauan matematis tersebut, kita dapat melakukan eksperimen pada akuarium yang cukup panjang sehingga hanya tampak seperti sistem satu dimensi. Akuarium diatur sedemikian rupa dengan diberi sekat pada salah satu bagian yang dekat dengan ujung untuk memberikan simpangan awal gelombang tertentu.

Ada 3 percobaan yang dapat dilakukan dengan menggunakan akuarium seperti pada gambar 5, yaitu

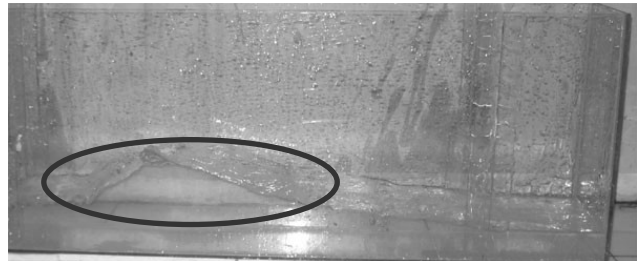
- (1) Δh diatur cukup kecil dibandingkan kedalaman air,
- (2) Δh diatur cukup besar dibandingkan kedalaman air, dan
- (3) dua buah air dengan Δh yang besar dan berbeda, masing dari kiri dan kanan ditumbukkan di tengah-tengah akuarium (lebih jelasnya lihat gambar 6).



Gambar 6. Keadaan awal untuk menghasilkan dua gelombang air yang akan bertumbukan.



Gambar 7. Gelombang permukaan yang dihasilkan berbentuk sinusoidal pada kondisi percobaan (1).



Gambar 8. Bentuk soliton dihasilkan pada kondisi percobaan (2).

Hasil percobaan (1) dan (2) ditunjukkan berturut-turut pada gambar (7) dan (8). Untuk percobaan (3), foto yang tepat sulit diperoleh karena kecepatan gelombang yang cukup tinggi. Namun pengamatan menunjukkan bahwa dua gelombang air nonlinear yang bertumbukan cenderung mempertahankan bentuknya masing-masing sehingga dapat digolongkan sebagai soliton dan hasil ini sesuai dengan definisi yang dikemukakan pada bagian pendahuluan.

Daftar Pustaka

- [1] N J Zabusky, M D Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [2] J S Russel, *Report on Waves*, Rep. 14th Meet. British. Assoc. Adv. Sci. 311-390, John Murray (1844).
- [3] T L Chow, *Classical Mechanics*, John Wiley and Sons, New York (1995).
- [4] G B Airy, *Tides and Waves*, Encyclop. Metrop. Fellowes, London (1845).
- [5] www.wikipedia.org, search : tsunami
- [6] F Ursell, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49**, 685-694 (1953).